1回目に×は（$c+d$）人，2回目に×は（$b+d$）人ですから，その差は，

$$(c+d)-(b+d)=(c-b)\ (\text{人})$$ です。

要するに，bとcとの差がこの変化を示す手がかりになることは確かです。

さて，（1回目，2回目）の順で，（○，○），（×，×）のa人，d人は，○，×に変化のない生徒の数ですから，これからは何の情報も得られません。これに対して，（○，×），（×，○）のb人，c人は，○，×に変化のあった生徒の数ですから，これらは変化を示す一つの手がかりになります。

もしも，一定期間の時間の経過が，生徒の○，×を無作為に変化させるものとすれば，（$b+c$）人中，理論的には，$\frac{(b+c)}{2}$人は○に，$\frac{(b+c)}{2}$人は×になると考えられます。

したがって，この$\frac{(b+c)}{2}$が理論度数に当りますから，

$$\chi^2=\frac{\left(b-\frac{b+c}{2}\right)^2}{\frac{b+c}{2}}+\frac{\left(c-\frac{b+c}{2}\right)^2}{\frac{b+c}{2}}=\frac{(b-c)^2}{(b+c)}$$

$$\boxed{\therefore\quad \chi^2=\frac{(b-c)^2}{(b+c)}\ ,\ \text{自由度は}1}$$

これが，1回目，2回目の変化の程度を示すχ^2の式で，この式の分子には，1回目と2回目の○や×の差を示す式（$b-c$）（の2乗）が表れています。

なお，この場合の自由度は1です。

さて，この式を用いて，（例23）の検定をしてみましょう。

1．仮説H_0：「1回目と2回目の○，×に変化はない」
　対立仮説：「1回目と2回目の○，×に変化がある」

2．$\chi^2=\frac{(b-c)^2}{(b+c)}=\frac{(27-8)^2}{(27+8)}=10.3$

3．危険率は5％，自由度は1　　$\therefore\quad \chi^2(1,\ 0.05)=3.84$