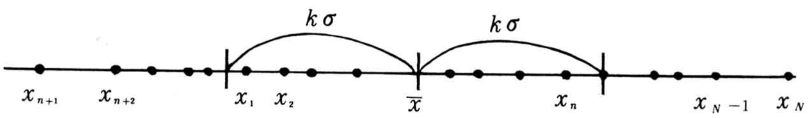
問 6　チェビシェフの定理の証明は，どうするのですか。

(答え)　チェビシェフの定理は，「どんなデータにおいても平均値$\overline{x}$からのずれが，標準偏差σのk倍より小のものは，全体の$1-\frac{1}{k^2}$以上ある」，というものでした。

いま，データが，N個の数値で，このうち，x_1，x_2，………，x_nのn個が，$\overline{x}$からのずれが，σのk倍より小のもので，残りのx_{n+1}，x_{n+2}，………，$\overline{x}_N$ の$(N-n)$個は，$\overline{x}$からのずれが，σのk倍以上であるものとします。



すると，$\sigma^2=\frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N}(x_i-\overline{x})$

$$=\frac{1}{N}\{\sum_{i=1}^{n}(x_i-\overline{x})^2+\sum_{i=n+1}^{N}(x_i-\overline{x})^2\}\geqq\frac{1}{N}\sum_{i=n+1}^{N}(x_i-\overline{x})^2$$

$$\therefore N\sigma^2\geqq\sum_{i=n+1}^{N}(x_i-\overline{x})^2=(x_{n+1}-\overline{x})^2+(x_{n+2}-\overline{x})^2+\cdots\cdots+(x_N-\overline{x})^2\cdots\cdots①$$

ここで，$|x_{n+1}-\overline{x}|\geqq k\sigma$，$|x_{n+2}-\overline{x}|\geqq k\sigma$，……，$|x_N-\overline{x}|\geqq k\sigma$

よって，　　　　　　　$(N-n)$個

$(x_{n+1}-\overline{x})^2\geqq k^2\sigma^2$，$(x_{n+2}-\overline{x})\geqq k^2\sigma^2$，………，$(x_N-\overline{x})^2\geqq k^2\sigma^2$

よって①から

$$N\sigma^2\geqq(N-n)k^2\sigma^2$$

$$\therefore\ \frac{1}{k^2}\geqq\frac{N-n}{N}\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots②$$

これは，平均値$\overline{x}$からのずれが，標準偏差σのk倍以上ずれているものの割合は，$\frac{1}{k^2}$以下である，ことを示しています。チェビシェフの定理を，この形で述べることもあります。

②を変形して，$\frac{n}{N}\geqq1-\frac{1}{k^2}$　これで，上に述べた，チェビシェフの定理が証明されたことになります。