

問9 得点が正規分布をするとき、その規準値の分布と、偏差値の分布はどうなるのですか。

(答え) 平均値が $\bar{x}$ 、標準偏差が $\sigma$ の正規分布の確率密度関数は、

$$f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} e^{-\frac{(x-\bar{x})^2}{2\sigma^2}} \dots\dots\dots ①$$

で表されます。そして、この関数のグラフが、正規分布曲線でした。

○ 得点を $x$ 、その規準値を $t$ とし、 $t$ の確率密度関数を $g(t)$ としますと、

$$\frac{x-\bar{x}}{\sigma} = t \dots\dots\dots ②$$

①、②から、 $t$ に関する式を求めればよいのですが、この場合①は確率密度関数、すなわち、縦軸に密度を目盛った場合の式ですから、②による $x$ から $t$ への交換は、割合(確率、面積)が等しい、という条件のもとに行わなければなりません。

(面積) = (たて) × (よこ)  
 $\therefore f(x) dx = g(t) dt \dots\dots\dots ③$   
 $②より dx = \sigma dt \dots\dots\dots ④$   
 $①, ②, ③ ④より$

$$\frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} e^{-\frac{t^2}{2}} \cdot \sigma dt = g(t) \cdot dt$$

$$\therefore g(t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{t^2}{2}} (= \frac{1}{\sqrt{2\pi \cdot 1}} e^{-\frac{(t-0)^2}{2 \cdot 1^2}})$$

よって、規準値 $t$ の分布は、標準正規分布をすることがわかりました。

同様にして、任意の正規分布は、すべて標準正規分布に変換されます。

○ 得点を $x$ 、その偏差値を $y$ とし、 $y$ の確率密度関数を $h(y)$ としますと、

$$\frac{x-\bar{x}}{\sigma} = \frac{y-50}{10} \text{ これより } dx = \frac{\sigma}{10} dy$$

あとは、上と同様にして、結局、 $h(y) = \frac{1}{\sqrt{2\pi \cdot 10}} e^{-\frac{(y-50)^2}{2 \cdot 10^2}}$  が導かれます。これは $y$ が、平均値50、標準偏差10の正規分布をすることを示しています。