問18　2変数X，Yの相関係数をrとするとき，$-1 \leqq r \leqq 1$であることを証明してください。

(答え)　X_i，Y_i　($i=1, 2, 3, \cdots\cdots, n$)，$t$を実数とするとき，

$$(X_1 t - Y_1)^2 + (X_2 t - Y_2)^2 + \cdots\cdots + (X_n t - Y_n)^2 \geqq 0 \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \quad (1)$$

ここで，X_1，X_2，$\cdots\cdots$，X_nは，同時には0でないものとしますと，

等号は，

$$\frac{Y_1}{X_1} = \frac{Y_2}{X_2} = \cdots\cdots = \frac{Y_n}{X_n} = t \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \quad (2)$$

のとき成立することがわかります。(ただし，$X_i=0$のときは$Y_i=0$)

(1)の各項を展開して，tについて整とんすれば

$$(X_1^2 + X_2^2 + \cdots\cdots + X_n^2)\, t^2 - 2(X_1 Y_1 + X_2 Y_2 + \cdots\cdots + X_n Y_n)\, t + (Y_1^2 + Y_2^2 + \cdots\cdots + Y_n^2) \geqq 0$$

これが成立するための条件は，

$$(X_1 Y_1 + X_2 Y_2 + \cdots\cdots + X_n Y_n)^2 \leqq (X_1^2 + X_2^2 + \cdots\cdots + X_n^2)(Y_1^2 + Y_2^2 + \cdots\cdots + Y_n^2)$$

これが，コーシ・シュワルツの不等式です。これを変形して，次の不等式が導かれます。

$$-1 \leqq \frac{X_1 Y_1 + X_2 Y_2 + \cdots\cdots + X_n Y_n}{\sqrt{(X_1^2 + X_2^2 + \cdots\cdots + X_n^2)(Y_1^2 + Y_2^2 + \cdots\cdots + Y_n^2)}} \leqq 1 \cdots \quad (3)$$

ただし，等号は，(2)の成立するときに，成立します。

さて，2変数X，Yの相関係数rの定義式は，

$$\begin{aligned} r &= \frac{1}{n} \cdot \Sigma \left(\frac{x - \overline{x}}{s_x}\right)\left(\frac{y - \overline{y}}{s_y}\right) \\ &= \frac{1}{n} \cdot \frac{\Sigma (x_i - \overline{x})(y_i - \overline{y})}{\sqrt{\frac{1}{n}\Sigma (x_i - \overline{x})^2}\sqrt{\frac{1}{n}\Sigma (y_i - \overline{y})^2}} \\ &= \frac{\Sigma (x_i - \overline{x})(y_i - \overline{y})}{\sqrt{\Sigma (x_i - x)^2}\sqrt{\Sigma (y_i - y)^2}} \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \quad (4) \end{aligned}$$

ここで，$x_i - \overline{x} = X_i$，$y_i - \overline{y} = Y_i$ とおくと，