問20　φ（ファイ）係数とは何ですか。

(答え)　2変数X，Yの分布が，それぞれ全く二つの属性に分かれているとき，これらの属性をそれぞれ0，1で表した場合（実は何でもよい，Xの方をX_1，X_2，Yの方をY_1，Y_2でもよい）の相関係数のことで，φ相関，点相関係数ともいわれます。

Y \ X	1	0	計
1	a	b	$a+b$
0	c	d	$c+d$
計	$a+c$	$b+d$	n

左の2×2分割表の場合φ係数は，

$$\varphi=\frac{ab-bc}{\sqrt{(a+c)(b+d)(a+b)(c+d)}}$$

で与えられます。この式は，ピアソンの相関係数の定義式から，次のようにして導くことができます。

$$\begin{array}{cc|cc} & & X & Y \\ \hline a\text{個} & \left(\begin{array}{c} \\ \\ \\ \\ \end{array}\right. & \begin{array}{c}1\\1\\\vdots\\1\end{array} & \begin{array}{c}1\\1\\\vdots\\1\end{array} \\ b\text{個} & \left(\begin{array}{c} \\ \\ \\ \\ \end{array}\right. & \begin{array}{c}0\\0\\\vdots\\0\end{array} & \begin{array}{c}1\\1\\\vdots\\1\end{array} \\ c\text{個} & \left(\begin{array}{c} \\ \\ \\ \\ \end{array}\right. & \begin{array}{c}1\\1\\\vdots\\1\end{array} & \begin{array}{c}0\\0\\\vdots\\0\end{array} \\ d\text{個} & \left(\begin{array}{c} \\ \\ \\ \\ \end{array}\right. & \begin{array}{c}0\\0\\\vdots\\0\end{array} & \begin{array}{c}0\\0\\\vdots\\0\end{array} \end{array}$$

$$r=\frac{n\Sigma xy-(\Sigma x)(\Sigma y)}{\sqrt{n\Sigma x^2-(\Sigma x)^2}\sqrt{n\Sigma y^2-(\Sigma y)^2}}$$

ここで左表より

$\Sigma xy=a$，$\Sigma x=a+c$，$\Sigma y=a+b$

$\Sigma x^2=a+c$，　$\Sigma y^2=a+b$

$n=a+b+c+d$　ですから，

$$r=\frac{(a+b+c+d)a-(a+c)(a+b)}{\sqrt{(a+b+c+d)(a+c)-(a+c)^2}\sqrt{(a+b+c+d)(a+b)-(a+b)^2}}$$

$$=\frac{ad-bc}{\sqrt{(a+c)(b+d)(a+b)(c+d)}}$$

（$=\varphi$とおく）

さて，2×2分割表の場合，$\chi^2=\dfrac{n(ad-bc)^2}{(a+c)(b+d)(a+b)(c+d)}$でしたから，$\varphi$と$\chi^2$との間には，$\chi^2=n\varphi^2$（ただし，自由度は1）の関係が成り立っています。$\varphi=0$の検定は，$\chi^2$の独立性の検定によって行います。