(証明)

$$○\ m_{\overline{X}}=\frac{1}{N^n}\sum_{i=1}^{N^n}\overline{x}_i=\frac{1}{N^n}(\overline{x}_1+\overline{x}_2+\cdots\cdots+\overline{x}_{N^n})$$

$$=\frac{1}{N^n}\left[\frac{a_1+a_1+\cdots+a_1}{n}+\frac{a_2+a_1+\cdots+a_1}{n}+\cdots\cdots+\frac{a_N+a_N+\cdots\cdots+a_N}{n}\right]$$

$$=\frac{1}{N^n}\cdot\frac{1}{n}\cdot nN^{n-1}\sum_{i=1}^{N^n}a_i \quad \left(\begin{array}{l}\because a_1,\ a_2,\ \cdots\cdots,\ a_N\text{は，同じ数}x\text{個づつあって，}\\ \text{全体では}nN^n\text{個あるから，}x\times N=nN^n\text{より}\end{array}\right)$$

$$=\frac{1}{N^n}\sum_{i=1}^{N^n}a_i=m \qquad \therefore m_{\overline{X}}=m$$

$$○\ \sigma_{\overline{X}}^2=\frac{1}{N^n}\sum_{i=1}^{N^n}\overline{x}_i^2-m_{\overline{X}}^2=\frac{1}{N^n}(\overline{x}_1^2+\overline{x}_2^2+\cdots\cdots+\overline{x}_{N^n}^2)-m^2$$

$$=\frac{1}{N^n}\left[\left(\frac{a_1+a_1+\cdots+a_1}{n}\right)^2+\left(\frac{a_2+a_1+\cdots+a_1}{n}\right)^2+\cdots+\left(\frac{a_N+a_N++\cdots+a_N}{n}\right)^2\right]-m^2$$

$$=\frac{1}{N^n}\cdot\frac{1}{n^2}\left[(a_1+a_2+\cdots+a_1)^2+(a_2+a_1+\cdots+a_1)^2+\cdots\cdots+(a+a+\cdots+a)^2\right]-m^2 \quad ㋑$$

$$=\frac{1}{N^n}\cdot\frac{1}{n^2}\left[A\sum_{i=1}^{N}a_i^2+B\sum_{i<j}^{N}a_ia_j\right]-m^2$$

ここで，A，Bを決定することを考えます。㋑の〔　〕の中の(　)について，例えば，a_1が何個含まれるかによって分けて考えますと，a_1の個数が

0個	${}_nC_0(N-1)^n$組
1個	${}_nC_1(N-1)^{n-1}$組
2個	${}_nC_2(N-1)^{n-2}$組
⋮	⋮
r個	${}_nC_r(N-1)^{n-r}$組
⋮	⋮
$(n-1)$個	${}_nC_{n-1}(N-1)$組
n個	${}_nC_n(N-1)^0$組

一般化するために，　r個　　${}_nC_r(N-1)^{n-r}$組

を取り上げますと，

$$(\overbrace{a_1+a_1+\cdots\cdots+a_1}^{r\text{個}}\ \overbrace{+a_2+a_3+\cdots\cdots+a_i}^{(n-r)\text{個}})^2$$

よって，a_1^2の数はr^2個あって，これは，

a_1^2の形のものが　　r個

$2a_1a_1$の形のものが　　$r^2-r=r(r-1)$個

と考えることができます。