これが，${}_nC_r(N-1)^{n-r}$組ありますから，結局a_1^2の数は，

$$\{r+(r^2-r)\}\times{}_nC_r(N-1)^{n-r}$$

$$=r\,{}_nC_r(N-1)^{n-r}+r(r-1){}_nC_r(N-1)^{n-r}$$

$$=\frac{r\cdot n!}{r!(n-r)!}(N-1)^{n-r}+\frac{r(r-1)\cdot n!}{r!(n-r)!}(N-1)^{n-r}$$

$$=\frac{n(n-1)!}{(r-1)!(n-r)!}(N-1)^{n-r}+\frac{n(n-1)(n-2)!}{(r-2)!(n-r)!}(N-1)^{n-r}$$

$$=n\,{}_{n-1}C_{r-1}(N-1)^{n-r}+n(n-1){}_{n-2}C_{r-2}(N-1)^{n-r}$$

$$=n\,{}_{n-1}C_{r-1}(N-1)^{(n-1)-(r-1)}+n(n-1){}_{n-2}C_{r-2}(N-1)^{(n-2)-(r-2)}$$

これが，a_1がr個含まれる標本におけるa_1^2の数ですから，全標本のa_1^2の数は，

$$\Sigma\ \{r+(r^2-r)\}{}_nC_r(N-1)^{n-r}$$

$$=n\,\Sigma\,{}_{n-1}C_{r-1}(N-1)^{(n-1)-(r-1)}+n(n-1)\,\Sigma\,{}_{n-2}C_{r-2}(N-1)^{(n-2)-(r-2)}$$

$$=n\{1+(N-1)\}^{n-1}+n(n-1)\{1+(N-1)\}^{n-2}$$

$$=nN^{n-1}+n(n-1)N^{n-2}$$

これは，a_2^2，a_3^2，……，a_N^2についても全く同じですから，結局，

$$A=nN^{n-1}+n(n-1)N^{n-2}$$

よって，a_i^2の形の総数は$AN=nN^n+n(n-1)N^{n-1}$

ここで，a_ia_j（$i<j$）の形の項は，${}_NC_2=\dfrac{N(N-1)}{2}$組あって，各$a_ia_j$（例えば$a_1a_2$）の個数は$B$としましたから

$$B\times\frac{N(N-1)}{2}=n^2N^n-\{nN^n+n(n-1)N^{n-1}\}$$

$$=n(n-1)N^n-n(n-1)N^{n-1}$$

$$=n(n-1)N^{n-1}(N-1)$$

$\therefore\ B=2n(n-1)N^{n-2}$（ここに，$n^2N^n$は④の〔　〕内の(　　)を，展開したとき得られる項の総数)

したがって，

$$\sigma_{\overline{X}}^2=\frac{1}{N^nn^2}\Big[\{nN^{n-1}+n(n-1)N^{n-2}\}\sum_{j=1}^{N}a_i^2+2n(n-1)N^{n-2}\sum_{i<j}a_ia\Big]-m^2$$