(証明)　非復元抽出の場合，標本は，${}_NC_n$種類あることになります。

$$\circ\ m = \frac{1}{{}_NC_n}\sum_{i=1}^{{}_NC_n}\overline{x}_i = \frac{1}{{}_NC_n}(\overline{x}_1+\overline{x}_2+\cdots\cdots+\overline{x}_{{}_NC_n})$$

$$= \frac{1}{{}_NC_n}\left[\frac{a_1+a_2+\cdots+a_{n-1}+a_n}{n}+\frac{a_1+a_2+\cdots+a_{n-1}+a_{n+1}}{n}+\cdots\cdots\right] \quad ㋺$$

$$= \frac{1}{{}_NC_n}\times\frac{1}{n}\left\{{}_{N-1}C_{n-1}\sum_{i=1}^{N}a_i\right\}$$ （∵㋺の中で，各a_i（$i=1$，2，$\cdots N$）の数は，${}_{N-1}C_{n-1}$個）

$$= \frac{{}_{N-1}C_{n-1}}{{}_NC_n\cdot n}\sum_{i=1}^{N}a_i$$

$$= \frac{n}{N}\times\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{N}a_i = \frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N}a_i = m$$

$$\therefore m_{\overline{X}} = m$$

$$\circ\ \sigma_{\overline{X}}^2 = \frac{1}{{}_NC_n}\sum_{i=1}^{{}_NC_n}(\overline{x}_i-m)^2 = \frac{1}{{}_NC_n}\sum_{i=1}^{N}\overline{x}_i^2-m^2$$

$$= \frac{1}{{}_NC_n}\left\{\left(\frac{a_1+a_2+\cdots+a_{n-1}+a_n}{n}\right)^2+\left(\frac{a_1+a_2+\cdots+a_{n-1}+a_{n+1}}{n}\right)^2+\cdots\cdots\right\}-m^2$$

$$= \frac{1}{{}_NC_n}\cdot\frac{1}{n^2}\left\{{}_{N-1}C_{n-1}\sum_{i=1}^{N}a_i^2+{}_{N-2}C_{n-2}\cdot 2\sum_{i<j}a_ia_j\right\}-m^2$$

上式に，（準備１），（準備２）を代入して，

$$\sigma_{\overline{X}}^2 = \frac{1}{{}_NC_n}\cdot\frac{1}{n^2}\left[{}_{N-1}C_{n-1}N(m+\sigma^2)+{}_{N-2}C_{n-2}\{N^2m^2-N(m^2+\sigma^2)\}\right]-m^2$$

$$= \frac{{}_{N-1}C_{n-1}}{{}_NC_n}\cdot\frac{1}{n^2}N(m+\sigma^2)+\frac{{}_{N-2}C_{n-2}}{{}_NC_n}\cdot\frac{1}{n^2}\{N^2m^2-N(m^2+\sigma^2)\}-m^2$$

$$= \frac{n}{N}\cdot\frac{1}{n^2}\cdot N(m+\sigma^2)+\frac{n(n-1)}{N(N-1)}\cdot\frac{1}{n^2}\{N^2m^2-N(m^2+\sigma^2)\}-m^2$$

$$= \frac{(N-1)m^2+(N-1)\sigma^2+(n-1)Nm^2-(n-1)\sigma^2-\ n(N-1)m^2}{n(N-1)}$$

$$= \frac{N-n}{N-1}\cdot\frac{\sigma^2}{n}$$

$$\therefore\ \sigma_{\overline{X}}^2 = \frac{N-n}{N-1}\cdot\frac{\sigma^2}{n}$$

（終わり）

（注１） ここで，$\frac{N-n}{N-1}<1$ですから，非復元抽出における$\overline{X}$の分散は，復元抽出における$\overline{X}$の分散より小さい，ということがわかります。これは，復元