

問23 不偏分散とは何ですか。

(答え) 大きさが N の母集団から任意抽出した大きさ n の標本; $a_1, a_2, a_3, \dots, a_n$ において, 標本平均を \bar{x} , 標本分散を s^2 としますと,

$$s^2 = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n (a_i - \bar{x})^2$$

となり, これは, n が大のとき母分散 σ^2 の推定値として用いられます。

しかし, 大きさが N の母集団から, 大きさが n のあらゆる標本を抽出して, この標本分散たちの平均値を求めますと, それは母分散 σ^2 に一致しないのです。

ところが, 標本分散 s^2 ではなく,

$$s'^2 = \frac{1}{n-1} \sum_{i=1}^n (a_i - \bar{x})^2$$

をつくって, この s'^2 たちの平均値を求めますと, それは, 母分散 σ^2 に一致することがわかります。(証明は最後に述べてあります。)

このように, あらゆる標本から得られたある値 θ' たちの平均値が, 母集団のある値 θ に一致するとき, この θ' を θ の不偏(かたよりのない)推定量といい, その実現値を不偏推定値といいます。(問22での標本平均は, 母平均の不偏推定量になっています。)

この場合, s'^2 は母分散 σ^2 の不偏推定量であり, これを不偏分散といいます。 s^2 は不偏分散ではありません。ですから, 母分散の推定値としては, 標本分散 s^2 よりは, 不偏分散 s'^2 の方が良いとされます。

n が大のときは, s^2 でも s'^2 でもそう大したちがいはありませんから, どちらでもかまわないのですが, n が小のときは, この不偏分散 s'^2 が, 母分散 σ^2 の推定値として用いられます。

標準偏差のだせる電卓に, σ_{n-1} のキーのついているものがありますが, これは, 不偏分散の平方根を表しており, n が小のときは, 標本標準偏差 σ_n を用いるよりは, この不偏分散の平方根 σ_{n-1} を用いる方が適当であるとして, 用いられることがあります。

それでは, 次に証明を述べますが, ここで用いる記号は, すべて前問と同じ