ます。

${}_N C_n$組の標本のうち，第 i 番目の標本について考え，この標本分散を s_i^2としますと，

$$s_i^2=\frac{1}{n}\sum_{j=1}^{n}(a_{ij}-\overline{x_i})^2$$
$$=\frac{1}{n}\sum_{j=1}^{n}a_{ij}^2-\overline{x_i}^2$$

よって，標本分散たちの平均値は，

$$\frac{1}{{}_N C_n}\sum_{i=1}^{{}_N C_n}s_i^2=\frac{1}{{}_N C_n}\sum_{i=1}^{{}_N C_n}\{\frac{1}{n}\sum_{j=1}^{n}a_{ij}^2-\overline{x_i}^2\}$$
$$=\frac{1}{n}\cdot\frac{1}{{}_N C_n}(\sum_{j=1}^{n}a_{1j}^2+\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots+\sum_{j=1}^{n}a_{{}_N C_n j}^2)-\frac{1}{{}_N C_n}\sum_{i=1}^{{}_N C_n}\overline{x_i}^2\cdots④$$

ここで，(　) 内の a^2の数は，結局は $a_1^2\sim a_N^2$が同数ずつあるのですから，前問の図より，a_i^2 1つ当たり，$n\times{}_N C_n\div N={}_{N-1}C_{n-1}$個あることがわかります。また，

$$\frac{1}{{}_N C_n}\sum_{i=1}^{{}_N C_n}(\overline{x_i}-m)^2=\frac{1}{{}_N C_n}\sum_{i=1}^{{}_N C_n}\overline{x_i}^2-m^2$$

前問の結果より $=\dfrac{N-n}{N-1}\cdot\dfrac{\sigma^2}{n}$

$$\therefore\quad\frac{1}{{}_N C_n}\sum_{i=1}^{{}_N C_n}\overline{x_i}^2=\frac{N-n}{N-1}\cdot\frac{\sigma^2}{n}+m^2$$

よって④は，

$$\frac{1}{{}_N C_n}\sum_{i=1}^{{}_N C_n}s_i^2=\frac{1}{n}\cdot\frac{1}{{}_N C_n}({}_{N-1}C_{n-1}\sum_{i=1}^{N}a_i^2)-(\frac{N-n}{N-1}\cdot\frac{\sigma^2}{n}+m^2)$$
$$=\frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N}a_i^2-(\frac{N-n}{N-1}\cdot\frac{\sigma^2}{n}+m^2)$$
$$=(m^2+\sigma^2)-(\frac{N-n}{N-1}\cdot\frac{\sigma^2}{n}+m^2)$$
$$=\frac{N}{N-1}\cdot\frac{n-1}{n}\cdot\sigma^2$$

ここで，Nは大ですから，$\dfrac{N}{N-1}\fallingdotseq 1$

$$\therefore\quad\frac{1}{{}_N C_n}\sum_{i=1}^{{}_N C_n}s_i^2=\frac{n-1}{n}\sigma^2$$
$$\therefore\quad\frac{1}{{}_N C_n}\sum_{i=1}^{{}_N C_n}\frac{n\,s_i^2}{n-1}=\sigma^2$$
$$\therefore\quad\frac{1}{{}_N C_n}\sum_{i=1}^{{}_N C_n}\{\frac{1}{n-1}\sum_{j=1}^{n}(a_{ij}-\overline{x_i})^2\}=\sigma^2$$

これは，$\dfrac{1}{n-1}\sum_{j=1}^{n}(a_{ij}-\overline{x_i})^2=s_i'^2$たちの平均値が，母分散$\sigma^2$に一致していることを示しています。