

6. F 分布表

確率密度関数 $f_{n_1, n_2}(x)$ が,

$$f_{n_1, n_2}(x) = \begin{cases} \frac{n_1^{\frac{n_1}{2}} \cdot n_2^{\frac{n_2}{2}}}{B\left(\frac{n_1}{2}, \frac{n_2}{2}\right)} \cdot \frac{x^{\frac{n_1-2}{2}}}{(n_1 x + n_2)^{\frac{n_1+n_2}{2}}} & (x > 0) \\ 0 & (x \leq 0) \end{cases}$$

で定義される分布を、自由度 (n_1, n_2) の F 分布といいます。定積分

$$F_{n_1, n_2}(t) = \frac{n_1^{\frac{n_1}{2}} \cdot n_2^{\frac{n_2}{2}}}{B\left(\frac{n_1}{2}, \frac{n_2}{2}\right)} \int_0^t \frac{x^{\frac{n_1-2}{2}}}{(n_1 x + n_2)^{\frac{n_1+n_2}{2}}} dx \dots\dots\dots \textcircled{1}$$

の値が求まれば、手さぐり法によって、%点も求めることができます。

①を変形します。

$$\begin{aligned} F_{n_1, n_2}(t) &= \frac{n_1^{\frac{n_1}{2}} \cdot n_2^{\frac{n_2}{2}}}{B\left(\frac{n_1}{2}, \frac{n_2}{2}\right)} \times \frac{1}{n_2^{\frac{n_1+n_2}{2}}} \int_0^t \frac{x^{\frac{n_1-2}{2}}}{\left(\frac{n_1}{n_2}x + 1\right)^{\frac{n_1+n_2}{2}}} dx \\ &= \frac{1}{B\left(\frac{n_1}{2}, \frac{n_2}{2}\right)} \times \left(\frac{n_1}{n_2}\right)^{\frac{n_1}{2}} \times \int_0^t \frac{x^{\frac{n_1-2}{2}}}{\left(\frac{n_1}{n_2}x + 1\right)^{\frac{n_1+n_2}{2}}} dx \end{aligned}$$

ここで、 $\frac{n_1}{n_2}x = \tan^2 \theta$ とおくと、

$$\begin{array}{l|l} x & 0 \rightarrow t \\ \theta & 0 \rightarrow \alpha \end{array} \quad (0 \leq \alpha < \frac{\pi}{2}), \quad dx = \frac{n_2}{n_1} \times 2 \tan \theta \sec^2 \theta d\theta$$

ただし、 $\frac{n_1}{n_2}t = \tan^2 \alpha$ より $\tan \alpha = \sqrt{\frac{n_1 t}{n_2}}$

これより、 $\sin \alpha = \sqrt{\frac{n_1 t}{n_1 t + n_2}}$, $\cos \alpha = \sqrt{\frac{n_2}{n_1 t + n_2}}$

そして、 $x^{\frac{n_1-2}{2}} = \left(\frac{n_2}{n_1} \tan^2 \theta\right)^{\frac{n_1-2}{2}} = \left(\frac{n_2}{n_1}\right)^{\frac{n_1-2}{2}} \cdot \tan^{n_1-2} \theta$

$\left(\frac{n_1}{n_2}x + 1\right)^{\frac{n_1+n_2}{2}} = (\tan^2 \theta + 1)^{\frac{n_1+n_2}{2}} = \sec^{n_1+n_2} \theta$

ですから、

$$F_{n_1, n_2}(t) = \frac{1}{B\left(\frac{n_1}{2}, \frac{n_2}{2}\right)} \times \left(\frac{n_1}{n_2}\right)^{\frac{n_1}{2}} \times \int_0^{\alpha\left(\frac{n_1}{n_2}\right)} \frac{\tan^{n_1-2} \theta}{\sec^{n_1+n_2} \theta} \times \frac{n_2}{n_1} \times 2 \tan \theta \sec^2 \theta d\theta$$