6．F分布表

確率密度関数　$f_{n_1, n_2}(x)$が，

$$f_{n_1, n_2}(x) = \begin{cases} \dfrac{n_1^{\frac{n_1}{2}} \cdot n_2^{\frac{n_2}{2}}}{B\left(\frac{n_1}{2}, \frac{n_2}{2}\right)} \cdot \dfrac{x^{\frac{n_1-2}{2}}}{(n_1 x + n_2)^{\frac{n_1+n_2}{2}}} & (x > 0) \\ 0 & (x \leqq 0) \end{cases}$$

で定義される分布を，自由度（n_1, n_2）のF分布といいます。定積分

$$F_{n_1, n_2}(t) = \frac{n_1^{\frac{n_1}{2}} \cdot n_2^{\frac{n_2}{2}}}{B\left(\frac{n_1}{2}, \frac{n_2}{2}\right)} \int_0^t \frac{x^{\frac{n_1-2}{2}}}{(n_1 x + n_2)^{\frac{n_1+n_2}{2}}} dx \cdots\cdots\cdots\cdots ①$$

の値が求まれば，〝手さぐり法〟によって，%点も求めることができます。

①を変形します。

$$\begin{aligned} F_{n_1, n_2}(t) &= \frac{n_1^{\frac{n_1}{2}} \cdot n_2^{\frac{n_2}{2}}}{B\left(\frac{n_1}{2}, \frac{n_2}{2}\right)} \times \frac{1}{n_2^{\frac{n_1+n_2}{2}}} \int_0^t \frac{x^{\frac{n_1-2}{2}}}{\left(\frac{n_1}{n_2} x + 1\right)^{\frac{n_1+n_2}{2}}} dx \\ &= \frac{1}{B\left(\frac{n_1}{2}, \frac{n_2}{2}\right)} \times \left(\frac{n_1}{n_2}\right)^{\frac{n_1}{2}} \times \int_0^t \frac{x^{\frac{n_1-2}{2}}}{\left(\frac{n_1}{n_2} x + 1\right)^{\frac{n_1+n_2}{2}}} dx \end{aligned}$$

ここで，$\frac{n_1}{n_2} x = \tan^2\theta$ とおくと，

x	$0 \rightarrow t$
θ	$0 \rightarrow \alpha$

$\left(0 \leqq \alpha < \frac{\pi}{2}\right)$，$dx = \frac{n_2}{n_1} \times 2 \tan\theta \sec^2\theta \, d\theta$

ただし，$\frac{n_1}{n_2} t = \tan^2\alpha$ より $\tan\alpha = \sqrt{\frac{n_1 t}{n_2}}$

これより，$\sin\alpha = \sqrt{\frac{n_1 t}{n_1 t + n_2}}$，$\cos\alpha = \sqrt{\frac{n_2}{n_1 t + n_2}}$

そして，　$x^{\frac{n_1-2}{2}} = \left(\frac{n_2}{n_1} \tan^2\theta\right)^{\frac{n_1-2}{2}} = \left(\frac{n_2}{n_1}\right)^{\frac{n_1-2}{2}} \cdot \tan^{n_1-2}\theta$

$\left(\frac{n_1}{n_2} x + 1\right)^{\frac{n_1+n_2}{2}} = (\tan^2\theta + 1)^{\frac{n_1+n_2}{2}} = \sec^{n_1+n_2}\theta$

ですから，

$$F_{n_1, n_2}(t) = \frac{1}{B\left(\frac{n_1}{2}, \frac{n_2}{2}\right)} \times \left(\frac{n_1}{n_2}\right)^{\frac{n_1}{2}} \times \int_0^\alpha \frac{\left(\frac{n_2}{n_1}\right)^{\frac{n_1-2}{2}} \tan^{n_1-2}\theta}{\sec^{n_1+n_2}\theta} \times \frac{n_2}{n_1} \times 2\tan\theta \sec^2\theta \, d\theta$$