$$=\frac{a_n^2+\frac{2a}{a_n}}{2a_n+\frac{a}{a_n^2}}=\frac{\frac{a}{a_n}\left(\frac{a_n^3}{a}+2\right)}{\frac{a}{a_n^2}\left(\frac{2a_n^3}{a}+1\right)}$$

$$\therefore a_{n+1}=a_n\times\left(\frac{\frac{a_n^3}{a}+2}{\frac{2a_n^3}{a}+1}\right)\qquad (n=0,1,2,\cdots\cdots)$$

と変形した方が収束が速い。

プログラムでは，$a_0=1$ から出発して

$|a_{n+1}-a_n|\leqq\varepsilon$ になったとき反復をやめさせるようにする。

4．乱　数　表

算術乱数の発生法としては，平方採中法，乗算型合同法，混合型合同法などがあるが，これらに関するわかりやすい例が，参考文献4にあるので，ここでは述べないことにする。なお，これらの例をプログラム化して，電卓で乱数を発生させるのは容易である。

5．三角関数表

〔準備1〕関数 $f(x)$ が，次のように条件Aをみたす交項級数に展開されているものとする。

$$f(x)=u_1-u_2+u_3-\cdots+(-1)^{n-1}u_n+(-1)^n u_{n+1}+\cdots\cdots\cdots$$

（ただし，条件A：$u_n>u_{n+1}$ $(1,2,3\cdots\cdots)$ をみたす）

このとき，$f(x)\fallingdotseq u_1-u_2+u_3-\cdots\cdots+(-1)^{n-1}u_n$

とすると，項打ち切りによる誤差Eは

$$E=(-1)^n(u_{n+1}-u_{n+2}+u_{n+3}-\cdots\cdots)$$
$$=(-1)^n\{u_{n+1}-(u_{n+2}-u_{n+3})-(\quad)-\cdots\cdots\}$$

ここで，条件Aより｛　｝の中の（　）の値はすべて正，よって

$$\{u_{n+1}-(u_{n+2}-u_{n+3})-(\quad)\cdots\}<u_{n+1}$$

$$\therefore |E|<u_{n+1}$$

これは，項打ち切りによる誤差の大きさは，その次の項の大きさより小であることを示す。したがって，あらかじめ，小数点以下何桁まで正しい値が必要であるかを決めておけば，この関係から，この級数の第何項まで計算すればよいかがわかる。

さて，$\sin x$，$\cos x$ は，

$$\sin x=x-\frac{x^3}{3!}+\frac{x^5}{5!}-\cdots\cdots+(-1)^{n-1}\frac{x^{2n-1}}{(2n-1)!}+\cdots$$

$$\cos x=1-\frac{x^2}{2!}+\frac{x^4}{4!}-\cdots+(-1)^{n-1}\frac{x^{2n-2}}{(2n-2)!}+\cdots\cdots$$

のように交項級数に展開でき，$0\leqq x<\pi$ のとき，いずれも条件Aをみたす（ただし，$\cos x$ の方は $n\geqq 2$ で）から，〔準備1〕によって，項打ち切りによる誤差の評価ができる。$\tan x$ は $\sin x/\cos x$ から求める。なお，x の単位はラジアンであるから注意する。

6．常用対数表

$\log_e(1+x)$ は，$0\leqq x\leqq 1$ のとき

$$\log_e(1+x)=x-\frac{x^2}{2}+\frac{x^3}{3}-\cdots\cdot+(-1)^{n+1}\frac{x^n}{n}+\cdots\cdot$$

と，交項級数に展開できる。これは，条件Aをみたすから，項打ち切りによる誤差の評価ができる。実際に数表を作成する場合は，

$a_{n+1}=a_n+\triangle x$ とおき，

$$\log_{10}a_{n+1}=\log_{10}(a_n+\triangle x)$$

$$=\frac{1}{\log_e 10}\times\log_e(a_n+\triangle x)$$

$$=\frac{1}{\log_e 10}\times\log_e a_n\left(1+\frac{\triangle x}{a_n}\right)$$

$$=\frac{1}{\log_e 10}\left\{\log_e a_n+\log_e\left(1+\frac{\triangle x}{a_n}\right)\right\}$$

$$=\frac{1}{\log_e 10}\left[\log_e a_n+\left\{\left(\frac{\triangle x}{a_n}\right)-\frac{1}{2}\left(\frac{\triangle x}{a_n}\right)^2+\frac{1}{3}\left(\frac{\triangle x}{a_n}\right)^3\cdots\cdots\cdots\right\}\right]$$

この漸化式をプログラムに組めばよい。ただし，$a_1=1$，$\log_e 1=0$，$\log_e 10$ の値は入力する。$\triangle x$