ここで，$\Gamma\left(\frac{n}{2}\right)=\int_0^{\infty} x^{\frac{n}{2}-1} e^{-x}\, dx$

$$\therefore\ x_n^2(t)=\frac{\int_0^{\frac{t}{2}} x^{\frac{n}{2}-1} e^{-x}\, dx}{\int_0^{\infty} x^{\frac{n}{2}-1} e^{-x}\, dx} \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots ②$$

(1) n が偶数の場合　② の

$$分子=\int_0^{\frac{t}{2}} x^{\frac{n}{2}-1} e^{-x}\, dx$$

$$=\left[-e^{-x} x^{\frac{n}{2}-1}\right]_0^{\frac{t}{2}}+\int_0^{\frac{t}{2}} e^{-x}\left(\frac{n}{2}-1\right) x^{\frac{n}{2}-2}\, dx$$

$$=-e^{-\frac{t}{2}}\left(\frac{t}{2}\right)^{\frac{n}{2}-1}+\left(\frac{n}{2}-1\right)\int_0^{\frac{t}{2}} e^{-x} x^{\frac{n}{2}-2}\, dx$$

以下，部分積分法をくり返して

$$=-e^{-\frac{t}{2}}\left(\frac{t}{2}\right)^{\frac{n}{2}-1}-\left(\frac{n}{2}-1\right) e^{-\frac{t}{2}}\left(\frac{t}{2}\right)^{\frac{n}{2}-2}$$

$$-\left(\frac{n}{2}-1\right)\left(\frac{n}{2}-2\right) e^{-\frac{t}{2}}\left(\frac{t}{2}\right)^{\frac{n}{2}-3}$$

$$-\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$

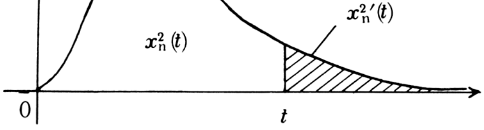
$$-\left(\frac{n}{2}-1\right)!\, e^{-\frac{t}{2}}+\left(\frac{n}{2}-1\right)!$$

$$分母=\Gamma\left(\frac{n}{2}\right)=\left(\frac{n}{2}-1\right)!$$

$\therefore\ x_n^2(t)$

$$=1-e^{-\frac{t}{2}}\left\{1+\frac{1}{1!}\left(\frac{t}{2}\right)+\frac{1}{2!}\left(\frac{t}{2}\right)^2+\cdots\cdots+\frac{1}{\left(\frac{n}{2}-1\right)!}\left(\frac{t}{2}\right)^{\frac{n}{2}-1}\right\}$$

ここで，$x_n^{2\prime}(t)=1-x_n^2(t)$ とおくと，



$x_n^{2\prime}(t)$

$$=e^{-\frac{t}{2}}\left\{1+\frac{1}{1!}\left(\frac{t}{2}\right)+\frac{1}{2!}\left(\frac{t}{2}\right)^2+\cdots\cdots+\frac{1}{\left(\frac{n}{2}-1\right)!}\left(\frac{t}{2}\right)^{\frac{n}{2}-1}\right\} \cdots ③$$

次の（表10－1）の①は，③において，

n=10(S)，t=18.49(S)として，計算したものである。d◇の数字は，③の｛　｝内の各項の値，その下のE◇はその和，F◇，e◇は，

$$e^{-\frac{18.49}{2}}=10^{-4}\times 0.9659341372$$

を示し，A◇は最終的な結果$x_{10}^{2\prime}(18.49)$を示している。この数値を四捨五入によって小数点以下5桁までとった値は，参考文献1の数値と全く一致している。また，②は，n=10のとき，〝手さぐり法〟によって，上側確率5％点を求めた結果を示す。

（表10－1）

①		②	
10	S	10	S
18.49	S	18.307	S
1.0000000000	d◇	1.0000000000	d◇
9.2450000000	d◇	9.1535000000	d◇
42.7350125000	d◇	41.8932811250	d◇
131.6950635208	d◇	127.8233829258	d◇
304.3802155625	d◇	292.5078339030	d◇
489.0552915833	E◇	472.3779979539	E◇
-4.0000000000	F◇	-3.0000000000	F◇
0.9659341372	e◇	0.1058486832	e◇
0.0472395201	A◇	0.0500005890	A◇

(2) nか奇数(n≧3，n=1のときは省略)　②の

$$分子=\int_0^{\frac{t}{2}} x^{\frac{n}{2}-1} e^{-x}\, dx$$

$$=-e^{-\frac{t}{2}}\left(\frac{t}{2}\right)^{\frac{n}{2}-1}-\left(\frac{n}{2}-1\right) e^{-\frac{t}{2}}\left(\frac{t}{2}\right)^{\frac{n}{2}-2}$$

$$-\left(\frac{n}{2}-1\right)\left(\frac{n}{2}-2\right) e^{-\frac{t}{2}}\left(\frac{t}{2}\right)^{\frac{n}{2}-3}$$

$$-\cdots\cdots\cdots\cdots$$

$$-\left(\frac{n}{2}-1\right)\left(\frac{n}{2}-2\right)\cdots\cdots\frac{5}{2}\cdot\frac{3}{2} e^{-\frac{t}{2}}\left(\frac{t}{2}\right)^{\frac{1}{2}}$$

$$+\left(\frac{n}{2}-1\right)\left(\frac{n}{2}-2\right)\cdots\cdots\frac{5}{2}\cdot\frac{3}{2}\cdot\frac{1}{2}\int_0^{\frac{t}{2}} e^{-x} x^{-\frac{1}{2}}\, dx$$

$$分母=\int_0^{\infty} x^{\frac{n}{2}-1} e^{-x}\, dx$$

$$=\left(\frac{n}{2}-1\right)\left(\frac{n}{2}-2\right)\cdots\cdots\frac{5}{2}\cdot\frac{3}{2}\cdot\frac{1}{2}\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)$$

$$=\left(\frac{n}{2}-1\right)\left(\frac{n}{2}-2\right)\cdots\cdots\frac{5}{2}\cdot\frac{3}{2}\cdot\frac{1}{2}\cdot\sqrt{\pi}$$

$$\therefore x_n^2(t)=\frac{1}{\sqrt{\pi}}\int_0^{\frac{t}{2}} e^{-x}\ x^{-\frac{1}{2}}\, dx$$