$$-\frac{1}{\sqrt{\pi}}e^{-\frac{t}{2}}\left(\frac{t}{2}\right)^{\frac{t}{2}}\left\{2+\frac{2\cdot 2}{1\cdot 3}\left(\frac{t}{2}\right)+\frac{2\cdot 2\cdot 2}{1\cdot 3\cdot 5}\left(\frac{t}{2}\right)^2\right.$$

$$\left.+\cdots\cdots+\frac{2\cdot 2\cdot 2\cdots\ 2}{1\cdot 3\cdot 5\cdots(n-2)}\left(\frac{t}{2}\right)^{\frac{n-3}{2}}\right\}$$

$$=\frac{1}{\sqrt{\pi}}\int_0^{\frac{t}{2}}e^{-x}x^{-\frac{1}{2}}dx$$

$$-\frac{2}{\sqrt{\pi}}e^{-\frac{t}{2}}\left(\frac{t}{2}\right)^{\frac{1}{2}}\left\{1+\frac{t}{1\cdot 3}+\frac{t^2}{1\cdot 3\cdot 5}+\cdots\cdots\right.$$

$$\left.+\cdots\cdots+\frac{t^{\frac{n-3}{2}}}{1\cdot 3\cdot 5\cdots(n-2)}\right\}$$

ここで

$$I=\frac{1}{\sqrt{\pi}}\int_0^{\frac{t}{2}}e^{-x}\ x^{-\frac{1}{2}}dx$$

において，

$x=\frac{u^2}{2}$ とおくと $x^{-\frac{1}{2}}=\frac{\sqrt{2}}{u}$

x	$0\longrightarrow\frac{t}{2}$
u	$0\longrightarrow\sqrt{t}$

, $dx=udu$

$$\therefore\quad I=\frac{1}{\sqrt{\pi}}\int_0^{\sqrt{t}}e^{-\frac{u^2}{2}}\frac{\sqrt{2}}{u}\cdot udu$$

$$=\frac{2}{\sqrt{2\pi}}\int_0^{\sqrt{t}}e^{-\frac{u^2}{2}}du$$

よって，

$$x_n^2(t)=\frac{2}{\sqrt{2\pi}}\int_0^{\sqrt{t}}e^{-\frac{u^2}{2}}du-\frac{2}{\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{t}{2}}t^{\frac{1}{2}}\left\{1+\frac{t}{1\cdot 3}\right.$$

$$\left.+\frac{t^2}{1\cdot 3\cdot 5}+\cdots\cdots+\frac{t^{\frac{n-3}{2}}}{1\cdot 3\cdot 5\cdots(n-2)}\right\}$$

nとtの値を与えて，これを電卓で計算する場合，プログラムがこの電卓の限界を越えて長くなるので，

$$\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_0^{\sqrt{t}}e^{-\frac{u^2}{2}}du \quad\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\text{④}$$

の値は，正規分布表から求めて入力するようにした。また，実際の計算では，(1)の場合と同様に，

$$x_n^{2\prime}(t)=1-x_n^2(t)\quad\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\text{⑤}$$

とおき，上側確率を求めるようにプログラムを組んだ。

次の（表10－2）の①は，⑤において，n＝9(S)，t=16(S)と，④の値0.499968は参考文献1の数値表から，入力して計算したものである。この数値を四捨五入によって，小数点以下5桁までとった値は，参考文献1の数値と全く一致している。また，②は，n=7のとき，〝手さぐり法〟によって，上側確率5％点を求めた結果を示す。

（表10－2）

①		②	
0.499968	S	0.4999116	S
9	S	7	S
16	S	14.0671	S
1.0000000000	d ◇	1.0000000000	d ◇
5.3333333333	d ◇	4.6890333333	d ◇
17.0666666666	d ◇	13.1922201606	d ◇
39.0095238095	d ◇		
		18.8812534939	E ◇
62.4095238095	E ◇	-3.0000000000	F ◇
-3.0000000000	F ◇	0.8817958423	e ◇
0.3354626279	e ◇	0.0500011014	A ◇
0.0668822452	A ◇		

11. t 分布表

〔準備3〕 ベータ関数 B(m, n)

$$B(m,\ n)=\int_0^1 x^{m-1}(1-x)^{n-1}dx\quad(m>0,\ n>0)$$

(性質) (1) B(m, n)＝B(n, m)

(2) $B(m,n)=2\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin^{2m-1}x\cos^{2n-1}x\ dx$

この(2)を導く

$$B(m,\ n)=\int_0^1 x^{m-1}(1-x)^{n-1}dx\text{において}$$

$x=\sin^2\theta$ とおくと

$dx=2\sin\theta\cos\theta$

x	$0\longrightarrow 1$
θ	$0\longrightarrow\frac{\pi}{2}$

$$\therefore B(m,n)=\int_0^{\frac{\pi}{2}}(\sin^2\theta)^{m-1}(1-\sin^2\theta)^{n-1}2\sin\theta\cos\theta\ d\theta$$

$$=2\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin^{2m-1}\theta\cos^{2n-1}\theta\ d\theta$$