〔準備４〕　$I(m)=\int \cos^m\theta\,d\theta$ とすると，
（mは２以上の整数）

$$I(m)=\frac{\sin\theta\cos^{m-1}\theta}{m}+\frac{m-1}{m}I(m-2)$$

これは，部分積分法によって導くことができる。

さて，$-\infty<t<\infty$の範囲の t に対して，確率密度関数fn(t)が

$$f_n(t)=\frac{1}{\sqrt{n}B(\frac{1}{2},\ \frac{n}{2})}(1+\frac{t^2}{n})^{-\frac{n+1}{2}}$$

で定義される分布を，自由度nのt分布という。
したがって，定積分

$$Tn(x)=\frac{1}{\sqrt{n}B(\frac{1}{2},\ \frac{n}{2})}\int_0^x(1+\frac{t^2}{n})^{-\frac{n+1}{2}}dt\cdots\cdots\cdots ①$$

の値を求めることができれば，〝手さぐり法〟によって％点も求めることもできる。

①において　$\frac{t}{\sqrt{n}}=\tan\theta$ とおくと

t	$0\longrightarrow x$
θ	$0\longrightarrow \alpha$

ただし，$\tan\alpha=\frac{x}{\sqrt{n}}$

$$dt=\sqrt{n}\sec^2\theta\ d\theta$$

よって，①は

$$Tn(x)=\frac{1}{\sqrt{n}B(\frac{1}{2},\ \frac{n}{2})}\int_0^\alpha(1+\tan^2\theta)^{-\frac{n+1}{2}}\sqrt{n}\sec^2\theta\ d\theta$$

$$=\frac{1}{B(\frac{1}{2},\ \frac{n}{2})}\int_0^\alpha \sec^{-(n-1)}\theta\ d\theta$$

（性質）(2)より

$$B(\frac{1}{2},\ \frac{n}{2})=2\int_0^{\frac{\pi}{2}}\cos^{n-1}\theta\ d\theta$$

$$\therefore Tn(x)=\frac{\int_0^\alpha\cos^{(n-1)}\theta\ d\theta}{2\int_0^{\frac{\pi}{2}}\cos^{(n-1)}\theta\ d\theta}\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots ②$$

ただし，

$$\sin\alpha=\frac{x}{\sqrt{x^2+n}},\quad \cos\alpha=\sqrt{\frac{n}{x^2+n}}$$

(1)　nが偶数の場合

〔準備４〕をくりかえして用いて，②の

$$分子=\int_0^\alpha\cos^{n-1}\theta\ d\theta$$

$$=\frac{\sin\alpha\cos^{n-2}\alpha}{n-1}+\frac{n-2}{n-1}\int_0^\alpha\cos^{n-3}\alpha\ d\theta$$

$$=\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$

$$=\frac{\sin\alpha\cos^{n-2}\alpha}{n-1}+\frac{(n-2)\sin\alpha\cos^{n-4}\alpha}{(n-1)(n-3)}$$

$$+\frac{(n-2)(n-4)\sin\alpha\cos^{n-6}\alpha}{(n-1)(n-3)(n-5)}+\cdots\cdots$$

$$+\frac{(n-2)(n-4)\cdots\cdots6\cdot4\sin\alpha\cos^2\alpha}{(n-1)(n-3)\cdots\cdots7\cdot5\cdot3}$$

$$+\frac{(n-2)(n-4)\cdots\cdots6\cdot4\cdot2\sin\alpha}{(n-1)(n-3)\cdots\cdots7\cdot5\cdot3\cdot1}$$

$$分母=2\int_0^{\frac{\pi}{2}}\cos^{n-1}\theta\ d\theta$$

$$=\frac{2(n-2)(n-4)\cdots\cdot6\cdot4\cdot2}{(n-1)(n-3)\cdots\cdot5\cdot3\cdot1}$$

$$\therefore Tn(x)=\frac{\sin\alpha}{2}\ \{1+\frac{1}{2}\cos^2\alpha+\frac{1\cdot3}{2\cdot4}\cos^4\alpha$$

$$+\cdots\cdots+\frac{1\cdot3\cdots\cdots(n-3)}{2\cdot4\cdots\cdots(n-2)}\cos^{n-2}\alpha\}\quad ③$$

(2)　nが奇数（n≧３，n=1のときは省略）の場合

②の

$$分子=\int_0^\alpha\cos^{n-1}\theta\ d\theta$$

$$=\frac{\sin\alpha\cos^{n-2}\alpha}{n-1}+\frac{(n-2)\sin\alpha\cos^{n-4}\alpha}{(n-1)(n-3)}$$

$$+\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$

$$+\frac{(n-2)(n-4)\cdots\cdots5\cdot3\sin\alpha\cos\alpha}{(n-1)(n-3)\cdots\cdots6\cdot4\cdot2}$$

$$+\frac{(n-2)(n-4)\cdots\cdots5\cdot3\cdot1\alpha}{(n-1)(n-3)\cdots\cdots6\cdot4\cdot2}$$

$$分母=\frac{2(n-2)(n-4)\cdots\cdots\cdots5\cdot3\cdot1}{(n-1)(n-3)\cdots\cdots\cdots6\cdot4\cdot2}\cdot\frac{\pi}{2}$$