12. F 分 布 表

確率密度関数$f_{n_1, n_2}(x)$が

$$f_{n_1,n_2}(x)=\begin{cases}\dfrac{n_1^{\frac{n_1}{2}}\cdot n_2^{\frac{n_2}{2}}}{B(\frac{n_1}{2},\frac{n_2}{2})}\cdot\dfrac{x^{\frac{n_1-2}{2}}}{(n_1x+n_2)^{\frac{n_1+n_2}{2}}} & (x>0)\\ 0 & (x\leqq 0)\end{cases}$$

で定義される分布を，自由度(n_1, n_2)のF分布という。定積分

$$F_{n_1,n_2}(t)=\frac{n_1^{\frac{n_1}{2}}\cdot n_2^{\frac{n_2}{2}}}{B(\frac{n_1}{2},\frac{n_2}{2})}\int_0^t\frac{x^{\frac{n_1-2}{2}}}{(n_1x+n_2)^{\frac{n_1+n_2}{2}}}dx\cdots ①$$

の値が求まれば，〝手さぐり法〟によって%点も求めることができる。

①を変形する

$$F_{n_1,n_2}(t)=\frac{n_1^{\frac{n_1}{2}}\cdot n_2^{\frac{n_2}{2}}}{B(\frac{n_1}{2},\frac{n_2}{2})}\times\frac{1}{n_2^{\frac{n_1+n_2}{2}}}\int_0^t\frac{x^{\frac{n_1-2}{2}}}{(\frac{n_1}{n_2}x+1)^{\frac{n_1+n_2}{2}}}dx$$

$$=\frac{1}{B(\frac{n_1}{2},\frac{n_2}{2})}\times(\frac{n_1}{n_2})^{\frac{n_1}{2}}\times\int_0^t\frac{x^{\frac{n_1-2}{2}}}{(\frac{n_1}{n_2}x+1)}dx$$

ここで，$\frac{n_1}{n_2}x=\tan^2\theta$とおくと

$$dx=\frac{n_2}{n_1}\times 2\tan\theta\sec^2\theta\, d\theta$$

x	$0\longrightarrow t$	
θ	$0\longrightarrow\alpha$	$(0\leqq\alpha<\frac{\pi}{2})$

ただし，$\frac{n_1}{n_2}t=\tan^2\alpha$より

$$\tan\alpha=\sqrt{\frac{n_1t}{n_2}}$$

これより，

$$\sin\alpha=\sqrt{\frac{n_1t}{n_1t+n_2}},\quad\cos\alpha=\sqrt{\frac{n_2}{n_1t+n_2}}$$

そして，

$$x^{\frac{n_1-2}{2}}=(\frac{n_2}{n_1}\tan^2\theta)^{\frac{n_1-2}{2}}=(\frac{n_2}{n_1})^{\frac{n_1-2}{2}}\cdot\tan^{n_1-2}\theta$$

$$(\frac{n_1}{n_2}x+1)^{\frac{n_1+n_2}{2}}=(\tan^2+1)^{\frac{n_1+n_2}{2}}=\sec^{n_1+n_2}\theta$$

であるから，

$$F_{n_1,n_2}(t)=\frac{1}{B(\frac{n_1}{2},\frac{n_2}{2})}\times(\frac{n_1}{n_2})^{\frac{n_1}{2}}\times\int_0^\alpha\frac{(\frac{n_2}{n_1})^{\frac{n_1-2}{2}}\tan^{n_1-2}\theta}{\sec^{n_1+n_2}\theta}$$

$$\times\frac{n_2}{n_1}\times 2\tan\theta\sec^2\theta\, d\theta$$

$$=\frac{2}{B(\frac{n_1}{2},\frac{n_2}{2})}\int_0^\alpha\frac{\tan^{n_1-1}\theta}{\sec^{n_1+n_2-2}\theta}d\theta$$

$$=\frac{2}{B(\frac{n_1}{2},\frac{n_2}{2})}\int_0^\alpha\frac{\sin^{n_1-1}\theta}{\cos^{n_1-1}\theta}\times\cos^{n_1+n_2-2}\theta\ d\theta$$

$$=\frac{2}{B(\frac{n_1}{2},\frac{n_2}{2})}\int_0^\alpha\sin^{n_1-1}\theta\cos^{n_2-1}\theta\, d\theta$$

ここで，ベータ関数$B(\frac{n_1}{2},\frac{n_2}{2})$は，

$$B(\frac{n_1}{2},\frac{n_2}{2})=2\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin^{n_1-1}\theta\cos^{n_2-1}\theta\, d\theta$$

$$\therefore F_{n_1,n_2}(t)=\frac{\int_0^\alpha\sin^{n_1-1}\theta\cos^{n_2-1}\theta\, d\theta}{\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin^{n_1-1}\theta\cos^{n_2-1}\theta\, d\theta}\cdots\cdots\cdots ②$$

〔準備4〕m，nを2以上の整数として，

$I(m, n)=\int\sin^m\theta\cos^n\theta\, d\theta$とおくと

$$I(m,n)=-\frac{\sin^{m-1}\theta\cos^{n+1}\theta}{m+n}+\frac{m-1}{m+n}I(m-2,n)$$

②と〔準備4〕より，

(1) n_1が偶数のとき，($F'_{n_1,n_2}(t)=1-F_{n_1,n_2}(t)$として，)

$$F'_{n_1,n_2}(t)=\cos^{n_2}\alpha\ \{1+\frac{n_2}{2}\sin^2\alpha+\frac{n_2(n_2+2)}{2\cdot 4}\sin^4\alpha+\cdots\cdots+\frac{n_2(n_2+2)\cdots(n_1+n_2-4)}{2\cdot 4\ \cdots\ (n_1-2)}\sin^{n_1-2}\alpha\}$$

上式は，n_2の偶数，奇数のいかんにかかわらず成立する。n_1が奇数，n_2が偶数の場合は，F分布の性質によって，(1)の場合に帰着される。n_1，n_2がともに奇数の場合，②式はもう少し長い式に展開される。

(参考文献)

1．統計数値表　JAS 1972　日本規格協会
2．簡易統計数値表　日本規格協会
3．電子計算機と数値計算　一松信著　朝倉書店
4．身近なデータによる統計解析入門　脇本和昌著　森北出版