$$\therefore \frac{b}{a}=\sqrt{1+b^2} \qquad \therefore a=\frac{b}{\sqrt{1+b^2}} \cdots\cdots\cdots\cdots ①$$

また，△TPM∽△TLHより $\dfrac{TP}{PM}=\dfrac{TL}{LH}$

$$\therefore \frac{b-b'}{b'}=\frac{b}{a} \qquad \therefore b'=\frac{ab}{a+b} \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots ②$$

したがって，内接する正ｎ角形，正２ｎ角形の周の長さをそれぞれ２Ａ，２Ａ′とし，外接する正ｎ角形，正２ｎ角形の周の長さをそれぞれ２Ｂ，２Ｂ′とすれば

$A=na$，$B=nb$，$A'=2na'$，$B'=2nb'$

よって　$a=\dfrac{A}{n}$，$b=\dfrac{B}{n}$，$b'=\dfrac{B'}{2n}$

これらを①，②に代入すると

$$A=\frac{B}{\sqrt{1+\left(\frac{B}{n}\right)^2}} \quad , \quad B'=\frac{2AB}{A+B}$$

ゆえに，単位円に内接および外接する正2^{n+1}角形（$n=1,2,3,\cdots\cdots$）の周の長さをそれぞれ2An 2Bn とすると，次の漸化式が成り立つ。

$$B_1=4,\ A_n=\frac{B_n}{\sqrt{1+\left(\frac{B_n}{2^{n+1}}\right)^2}} \ ,\ B_{n+1}=\frac{2A_nB_n}{A_n+B_n}$$

この漸化式により，An Bn（$n=1,2,3,\cdots$）は，下の図のように次々と求められる。

$$\begin{array}{l} B_1 \to A_1 \\ \downarrow \\ B_2 \to A_2 \\ \downarrow \\ B_3 \to A_3 \\ \downarrow \\ B_4 \to A_4 \\ \downarrow \\ B_5 \to A_5 \\ \downarrow \\ B_6 \end{array}$$

流れ図は図４のようになる。

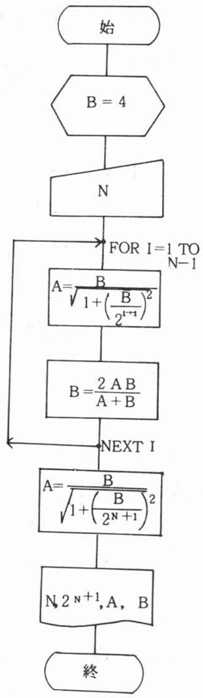

図４

〔計算の結果と考察〕

表４は，半径１の円に内接および外接する正2^{N+1}角形の周の長さの２分の１の値を表しており，パソコンで作成した。

表４　円周率の計算

N	ヘン	ナイセツ	ガイセツ
2	8	3.0614675	3.3137085
3	16	3.1214452	3.1825979
4	32	3.1365485	3.1517249
5	64	3.1403312	3.1441184
6	128	3.1412773	3.1422236
7	256	3.1415138	3.1417504
8	512	3.1415729	3.1416321
9	1024	3.1415877	3.1416025
10	2048	3.1415914	3.1415951
11	4096	3.1415923	3.1415933
12	8192	3.1415926	3.1415928
13	16384	3.1415926	3.1415927
14	32768	3.1415926	3.1415927
15	65536	3.1415926	3.1415926
16	131072	3.1415926	3.1415926
17	262144	3.1415926	3.1415926

表４からわかるように，Ｎ＝15すなわち正65536 角形のとき，$\ell n = Ln = 3.1415926$となっており，これによって，円周率の値は小数点以下７けためまでは3.1415926 であることがわかったことになる。なお，πのけた数を多く出そうとする場合にはMachinの公式などを使えば求めることができる。ここでのねらいは円周率の発見にある。

(4) 区分求積法（定積分）

区間（a，b）をｎ等分し，図５のようにｎ個の長方形の面積をそれぞれ I_1, I_2，I_3……I_n とし $\sum_{k=1}^{n} I_k = S_n$とすると

$S_n = S_{n-1} + I_n$（$n \geqq 1$），ただし$S_0=0$

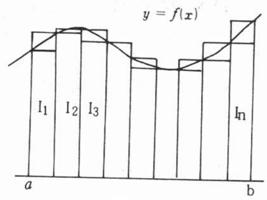

図５

例４　放物線 $y=x^2$ と直線 $x=1$，$x=5$ と x 軸によって囲まれる部分の面積を区分求積法で求める。

〔ねらい〕

定積分の学習のなかで，面積を区分求積法で求めることによって，面積の意味と定積分の計算のすばらしさを理解させたい。