

回数  $n$  が非常に大きいときは、相対度数  $x/n$  で  $\theta$  を推定するのが合理的であろうが、 $n$  がいくらより大であれば  $\theta$  を推定でき、それ以下では推定できないという限界を与えることは困難である。

したがって、実験的には、試みの回数が  $n_1$  であるとき、 $n_1 < n$  なる  $n$  を回数とする有限な系列を考察の対象とすればよい。

そこで、情報を極端に少なくして 2 回投げるとして、相対度数による推定結果  $\hat{\theta} = x/n$  と Bayes の推定による結果  $\hat{\theta} = (x+1)/(n+2)$  を比較してみる。

観測値 $x$	0	1	2
相対度数 $\hat{\theta}$	0	$\frac{1}{2}$	1
Bayes の推定 $\hat{\theta}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{3}{4}$

この比較から、実験回数  $n$  が小さいときは、相対度数による推定より Bayes による推定の方が実験の解明に役立つ確率 model を得るといえよう。

以上の考察から、自然的な標本空間の標本点に与える重さの定め方は、次のようにまとめられる。

- ① 重さの定め方は、確率測度の定義を満足すればよいから無数にある。
- ② 無数にある定め方の中から、有効適切なものを選べばよい。
- ③ 有効性の評価は、得られた確率 model がもとの試行の解明にどのように役立つかによってきまる。

次に理論的見地からみる。

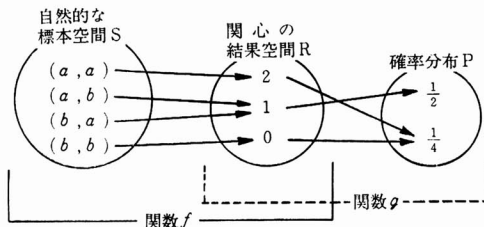
確率 model が実際の経験に無理なく合っているかどうかは応用される現象の型によるから、ある場合には物理的考察によって等しい重さ（標本点に与える）を仮定し、他の場合には、たとえおまかな第 1 近似にすぎないことが明らかでも、一般的な方向づけのため一番簡単な数値を重さとして導入すればよい。

したがって、理論では、標本点の重さは与えられているものと仮定してよいことになる。

(例)

2 つの硬貨を 1 回投げた実験を記述し、確率測度を誘導する。

表を  $a$ 、裏を  $b$  であらわし、自然的な標本空間の各標本点に重さ  $\frac{1}{4}$  を与え、表の出る回数に関心があるとする。



図のように関数  $f$  を定義し、関数  $g$  は  $f(s)=r$ ,  $s \in S, r \in R$  であるとき、 $f^{-1}(r)$  の元の重さの和を  $r$  に割り当てるものとする。

このように、関数  $g$  を定義すると、 $g$  は  $R$  の上に確率測度を誘導する。

そして、 $s \in S, f(s)=X$  なる  $X$  を確率変数、 $r \in R, g(r)=P_r(X=r)$  を確率密度関数と呼ぶ。

(例)

2 つの画鋸を 1 回投げた実験を記述してみる。

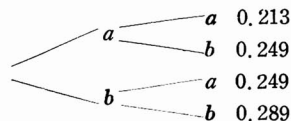
それには、上の例の自然的な標本空間  $S$  の標本点の重さを、この現象にあうようにかえればよい。

そこで、「新しい 算数—数学へのアプローチ (日本放送出版協会)」の P.147 より、実験結果を引用する。

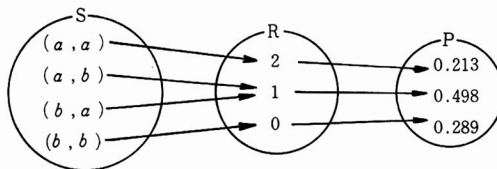
上向き ( $a$ )、 下向き ( $b$ ) の意味で、

1 つの画鋸を 50 回投げたとき、上向きが 23 回出たとなっていたので、 $a$  に与える重さを Bayes の推定できめる。

$$a = \frac{24}{52} = 0.462, \quad b = 0.538 \text{ となる。}$$



したがって、



なる確率 model を得る。

### 3. 確率 model の応用

確率 model を統計的処理にどのように応用するか、これを知ることは教材の展開を考える上でたいせつなことと思う。

それで、典型的な問題を取り上げ、確率 model から一般的傾向を推測し、その推測がどれくらい信頼できるかという程度について考える。

#### (1) 超幾何分布

「壺の中に赤球  $m$  個と白球  $n$  個が入っている。