―円周率πの値は どのようにして計算するのですか―

第1研修部　**渡　辺　十　三**

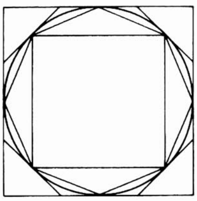
答え　円周率πの値を求める方法はいろいろありますが，ここでは，

(1)　もっとも原始的な方法と

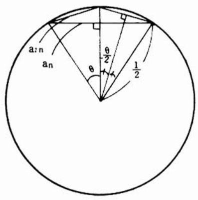
(2)　コンピューターを用いて計算する方法

の2つについて説明します。

まず，(1)の方法ですが，これは直径1の円（その円周の長さは$2\times\pi\times\frac{1}{2}=\pi$）に内接，外接する正多角形の周の長さを計算してその近似値を求めようとするものです。



（図1）



（図2）

上の図1から，

内接正4角形の周の長さ＜円周の長さπ＜外接正4角形の周の長さ

内接正8角形の周の長さ＜円周の長さπ＜外接正8角形の周の長さ

がわかり，さらに，内接，外接正8角形の周の長さの方が，内接，外接正4角形の周の長さより円周の長さπに近い値であることがわかります。つまり，辺の数を多くすればするほど円周の長さπによりよく近似することがわかりますから，内接，外接正16角形，32角形……と，次々に辺の数を2倍にした正多角形の周の長さを計算していって，下の関係からπの値にせまっていこうとするものです。

内接正n角形の周の長さ＜円周の長さπ＜外接正n角形の周の長さ

（※ただし，$n=2^m$，mは2以上の整数）

上の説明では，内接，外接正4角形から出発しましたが，内接，外接正6角形から出発してもよいのです。アルキメデス（287?～212ＢＣ）は，内接，外接正6角形から出発して正96角形の周の長さを計算し，

$$3.14084\cdots\cdots<\pi<3.14285\cdots\cdots$$

を得ています。ルドルフ（ドイツ1539～1610）は正2^{62}角形の周の長さを計算して，小数点以下35桁まで求めましたが，彼はこの計算にほとんど一生を費やしたそうです。日本では，関孝和（1642?～1708）が，内接正4角形から出発して正$2^{17}=131072$　角形の周の長さを計算し，小数点以下10桁まで求めています。また，鎌田俊清（1678～1747）は，正2^{44}角形の周の長さを計算して小数点以下25桁まで求めています。

問い　内接，外接正多角形の周の長さからπの値にせまってゆこうとするこの方法についてはよくわかりましたが，実さいは，どのようにして計算するのですか。

答え　それでは，この方法で，私が実さい計算した結果をのべてみましょう。計算は，筆算ではとても時間がかかりますので，電卓にさせました。

直径1の円に内接する正n角形（※）の周の長さをl_n，一辺の長さをa_n，一辺に対する中心角の大きさを2θとすると，図2より

$$l_n=na_n=n\times2\times\frac{1}{2}\times sin\theta=nsin\theta\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots①$$

$$l_{2n}=2na_{2n}=2n\times2\times\frac{1}{2}\times sin\frac{\theta}{2}=2nsin\frac{\theta}{2}\cdots\cdots②$$

①より　$l_n=2nsin\frac{\theta}{2}cos\frac{\theta}{2}$

これに，②より　$sin\frac{\theta}{2}=\frac{l_{2n}}{2n}$　を代入して

$$l_n=l_{2n}\sqrt{1-\left(\frac{l_{2n}}{2n}\right)^2}$$

両辺を二乗して，l_{2n}について解いて

$$l_{2n}=l_n\sqrt{\frac{2}{1+\sqrt{1-\left(\frac{l_n}{n}\right)^2}}}\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots③$$

の漸化式が得られました。

外接正多角形の場合も，ほぼ同じ考えで，次の漸化式が得られます。

$$l'_{2n}=\frac{2l'_n}{\sqrt{1+\left(\frac{l'_n}{n}\right)^2}+1}\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots④$$

（l'_nは外接正n角形の周の長さ）

直径が1の円に内接する正4角形の周の長さは$2\sqrt{2}$ですから，③で，$n=4$，$l_4=2\sqrt{2}$　を代入するとl_8が求まります。その値をまた③に代入するとl_{16}が求まり，以下同様にして，l_{32}，l_{64}，……が求まります。外接正4角形から出発する場合は，④で，$n=4$，$l'_4=4$を代入してゆけばよいわけです。この計算を電卓でやらせる場合は，③，④式を次のように変形して用いました。

③　$$l_{2n}=l_n+l_n\left\{\sqrt{\frac{2}{1+\sqrt{1-\left(\frac{l_n}{n}\right)^2}}}-1\right\}$$

④　$$l'_{2n}=l'_n+l'_n\left\{\frac{2}{\sqrt{1+\left(\frac{l'_n}{n}\right)^2}+1}-1\right\}$$

次の表は，上の式を用いて，電卓に計算させたものです。この電卓では，小数点以下は，15桁目以下が切り捨てられますので，誤差の関係で，内接正2^{22}角形まで，