外接の場合は正2^{23}角形までしか計算しませんが，どちらの場合も要した時間は２分足らずでした。電卓の威力はすばらしいですね。

m	$n=2^m$	ℓn	$\ell' n$
2	4	3.06146745892067	3.31370849898476
3	8	3.12144515225797	3.18259787807453
4	16	3.13654849054582	3.15172490742927
5	32	3.14033115695462	3.14411838524593
6	64	3.14127725093260	3.14222362994248
7	128	3.14151380114411	3.14175036916899
8	256	3.14157294036688	3.14163208070319
9	512	3.14158772527694	3.14160251025680
10	1024	3.14159142151094	3.14159511774958
11	2048	3.14159234556984	3.14159326962932
12	4096	3.14159257658457	3.14159280759966
13	8192	3.14159263433822	3.14159269209228
14	16384	3.14159264877663	3.14159266321546
15	32768	3.14159265238622	3.14159265599627
16	65536	3.14159265328861	3.14159265419149
17	131072	3.14159265351417	3.14159265374030
18	262144	3.14159265357056	3.14159265362752
19	524288	3.14159265358463	3.14159265359934
20	1048576	3.14159265358811	3.14159265359231
21	2097152	3.14159265358895	3.14159265359056
22	4194304	3.14159265358913	3.14159265359013
23	8388608		3.14159265359004

問い　(1)についてはわかりました。次に，(2)の方法について説明して下さい。

答え　これは，数学的には，$tan^{-1}x$（逆正接関数）によって表される特別な公式を用いて計算する方法です。このきっかけは，1671年にグレゴリーが公式

$$tan^{-1}x=x-\frac{x^3}{3}+\frac{x^5}{5}-\frac{x^7}{7}+\cdots+(-1)\frac{2n-1x^{2n-1}}{2n-1}+\cdots$$

$$(-1<x\leqq 1)$$

を発見したことに始まります。なお，この公式の導き出し方については，どの微積分の本にも書いてあります。

さて，グレゴリーの公式を用いてπの値を求めるひとつのアイデアは，この公式をそのまま使おうというものです。この公式で　$x=1$　とおきますと，ライプニッツ（1646～1716）の公式といわれる

$$\frac{\pi}{4}=1-\frac{1}{3}+\frac{1}{5}-\frac{1}{7}+\cdots\cdots$$

きれいな公式が導かれます。しかし，この級数は収束が非常に遅いので実さいのπの値の計算には役立ちません。シャープは1705年に　$x=\frac{1}{\sqrt{3}}$とおいて得られる級数

$$\frac{\pi}{6}=\frac{1}{\sqrt{3}}\left(1-\frac{1}{3.3}+\frac{1}{5.3^2}-\frac{1}{7.3^3}+\cdots\right)$$

から，πの値を小数点以下71桁まで計算しました。

グレゴリーの公式の右辺の級数は，正の項と負の項が互い違いに出てくる級数で，交項級数といわれますが，この級数でさらに

第n番目の項の大きさ＞第（$n+1$）番目の項の大きさが成り立っていますので，この級数の第n番目の項までとって計算したときの項打ち切りによる誤差の大きさは，次の第（$n+1$）番目の項より小さくなることがわかっていますから，あらかじめ必要桁数を考えておけば，第何項までこの級数を計算すればよいかが前もってわかります。

もうひとつのアイデアは，逆正接関数によって，もっと能率的にπを表す公式を見い出して，グレゴリーの公式によって計算しようというものです。

マチン（1680～1752）は，公式

$$\frac{\pi}{4}=4tan^{-1}\frac{1}{5}-tan^{-1}\frac{1}{239}$$

を発見し，これをグレゴリーの公式によって展開し，

$$\frac{\pi}{4}=4\left\{\frac{1}{5}-\frac{1}{3}\left(\frac{1}{5}\right)^3+\frac{1}{5}\left(\frac{1}{5}\right)^5-\frac{1}{7}\left(\frac{1}{5}\right)^7+\cdots\right\}$$
$$-\left\{\frac{1}{239}-\frac{1}{3}\left(\frac{1}{239}\right)^3+\frac{1}{5}\left(\frac{1}{239}\right)^5-\frac{1}{7}\left(\frac{1}{239}\right)^7+\cdots\right\}$$

を導き，πの値を100桁まで計算しています。シヤンクス（W. Shanks）も1874年に，この公式を用いて707桁まで計算しましたが，1946年に，ファーガソンが，小数点以下528桁目から先が間違っていることを確かめました。

なお，1761年にランベルトはπが無理数（循環しない無限小数）であることを証明しました。

逆正接関数によって，πを能率的に表す公式は，その後もいろいろ考えられました。主なものをあげますと，

$$\frac{\pi}{4}=4tan^{-1}\frac{1}{5}-tan^{-1}\frac{1}{70}+tan^{-1}\frac{1}{99}$$

（ラザフォード）

$$=6\,tan^{-1}\frac{1}{8}+2\,tan^{-1}\frac{1}{57}+tan^{-1}\frac{1}{239}$$

（ステルマー）

$$=12tan^{-1}\frac{1}{18}+8\,tan^{-1}\frac{1}{57}-5tan^{-1}\frac{1}{239}$$

（ガウス）

ラザフォードは自分の公式を用いて，1853年に，440桁まで計算しています。

史上初めてπの値を10万桁まで計算したのは，D. Shanks と J. W. Wrench の２人のアメリカ人で，彼らは1961年７月コンピューターＩＢM7090型により，８時間43分の時間を費やしてこの結果を得ました。このときに用いた公式は，ステルマーの公式でした。

問い　マチンの公式などから，グレゴリーの公式を用いてπの値を計算するこの方法についてはよくわかりましたが，マチンは，彼の公式をどのようにして発見したのでしょうか。

答え　それは，大変興味のある問題です。ラザフォード，ステルマー，ガウスなどの公式はいずれもマチンの公式の変形と見られますから，発見としてはマチンの公式の方がはるかに価値があります。マチンの公式の正し