いことは，すぐに証明されますが，マチンはこの公式をどのようにして発見したのか。実は，私もこの問題に興味を持ちましていろいろ調べてみましたが，これについて書いてある本は見当りませんでした。それで，自分なりに，以下のように考えてみました。

θ が小のとき　$\tan\theta \fallingdotseq \theta$　が成り立つ。

いま，4倍すると　$\frac{\pi}{4} \fallingdotseq 0.785$　となる角Aを考えますと　$A \fallingdotseq 0.196$

そこで，0.196に近い単位分数を考えますと，これは$\frac{1}{5}$です。そこで，　$\tan\alpha = \frac{1}{5}$　となる角 α を考えますと，$\frac{1}{5}$は小ですから，αはほぼ$\frac{1}{5}$に近い値をとり，4αは$\frac{\pi}{4}$に近い値となります。したがって，$\tan 4\alpha$ は $\tan\frac{\pi}{4}=1$　に近い値となります。

実さい，加法定理によって，

$$\tan 2\alpha = \frac{2\tan\alpha}{1-\tan^2\alpha} = \frac{12}{5}$$

$$\tan 4\alpha = \frac{2\tan 2\alpha}{1-\tan^2 2\alpha} = \frac{120}{119} \quad (1に近い！)$$

すなわち，4αは$\frac{\pi}{4}$よりもごくわずかだけ大きな値です。

そこで，この差をβとして

$$4\alpha - \beta = \frac{\pi}{4} \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots 1)$$

とおき，このβの値を，加法定理を用いて次のようにして求めます。

$$\tan(4\alpha-\beta) = \tan\frac{\pi}{4} = 1$$

$$\therefore \quad \frac{\tan 4\alpha - \tan\beta}{1+\tan 4\alpha \tan\beta} = 1$$

これに，$\tan 4\alpha = \frac{120}{119}$を代入して $\tan\beta$ を求めると，

$$\tan\beta = \frac{1}{239} \qquad となります。$$

$$\tan\alpha = \frac{1}{5},\quad \tan\beta = \frac{1}{239} \quad より$$

$$\alpha = \tan^{-1}\frac{1}{5},\quad \beta = \tan^{-1}\frac{1}{239}$$

これらを　1）に代入して

$$4\tan^{-1}\frac{1}{5} - \tan^{-1}\frac{1}{239} = \frac{\pi}{4}$$

このようにしてマチンの公式が，導き出されました。

同じように，1倍，2倍，3倍すると，それぞれ$\frac{\pi}{4}$となる角を考え，さらに，それに近い単位分数を考えることによって，

$$\frac{\pi}{4} = \tan^{-1}\frac{1}{2} + \tan^{-1}\frac{1}{3} \quad （オイラー）$$

$$= 2\tan^{-1}\frac{1}{3} + \tan^{-1}\frac{1}{7} \quad （クラウゼン）$$

$$= 3\tan^{-1}\frac{1}{4} + \tan^{-1}\frac{5}{99}$$

などの公式も導き出せました。

次に，マチンの公式から，ラザフォード，ステルマー，ガウスの公式を導くことを考えてみました。これらの公式は，すべて単位分数で表されています。それで n（既知），p, q（未知）を0でない整数として，次の分解が可能であるかどうかについて考えます。

$$\tan^{-1}\frac{1}{n} = \tan^{-1}\frac{1}{p} + \tan^{-1}\frac{1}{q} \quad \left(\begin{array}{l}仮に分解式\\といいます\end{array}\right) \cdots\cdots ④$$

$$\tan^{-1}\frac{1}{n} = \alpha,\quad \tan^{-1}\frac{1}{p} = \beta,\quad \tan^{-1}\frac{1}{q} = \gamma \quad とおくと$$

$$\alpha = \beta + \gamma \quad かつ$$

$$\tan\alpha = \frac{1}{n},\quad \tan\beta = \frac{1}{p},\quad \tan\gamma = \frac{1}{q}$$

$$よって \quad \tan\alpha = \tan(\beta+\gamma) = \frac{\tan\beta + \tan\gamma}{1-\tan\beta\tan\gamma} \quad より$$

$$\frac{1}{n} = \frac{\frac{1}{p}+\frac{1}{q}}{1-\frac{1}{pq}}$$

これをqについて解いて

$$q = \frac{np+1}{p-n} \quad (p \neq n)$$

この式から，p, q の整数解が得られるプログラムを組んで電卓に計算させますと，分解式④をみたす p, q の値があれば求まります。たとえば，$\tan^{-1}\frac{1}{239}$は次のような（p, q）の値によって分解可能であることがわかりました。

(70, −99), (213, −1958), (226, −4155)
(237, −28322), (238, −56883), (240, 57361)
(241, 28800), (252, 4633), (265, 2436)
(408, 577) ……

このうち，$\tan^{-1}\frac{1}{239} = \tan^{-1}\frac{1}{70} - \tan^{-1}\frac{1}{99}$　をマチンの公式に代入したものがラザフォードの公式です。また，この分解式を何度か用いて，

$$\tan^{-1}\frac{1}{5} = \tan^{-1}\frac{1}{7} + \tan^{-1}\frac{1}{18}$$

$$= \tan^{-1}\frac{1}{8} + \tan^{-1}\frac{1}{57} + \tan^{-1}\frac{1}{18}$$

$$\tan^{-1}\frac{1}{239} = \tan^{-1}\frac{1}{57} + 2\tan^{-1}\frac{1}{18} - \tan^{-1}\frac{1}{8}$$

これらをマチン公式に代入して，ステルマーの公式が得られました。この公式から，ガウスの公式はすぐ導かれます。

問い　最後に，なぜπの値を，そんなに何桁も計算するのですか。

答え　実用的には，πの値は小数点以下せいぜい10桁もあれば十分でしょう。それを，コンピューターで，何桁も計算する理由は，次の2つです。

ひとつは，πの値がどんなものであるか，どんな数字の連なりであるかを知りたいという知的好奇心から，もうひとつは，コンピューターの調整やテストのため，さらにはその性能を知るためです。