

ですから、 k にいろいろな値を与えて、それに対するこの定積分の値を求めて表にすればよい、ということになります。ところが、実はこの定積分の計算は、なかなか一筋なわけはいかないのです。正攻法で攻め切ることができないのです。そこで、ちょっと思考の方向転換を行ってみます。正攻法で攻め切れないときは、搦手から、とよくいわれます。そこから、この定積分を、以下のように攻め切ることができました。

関数 e^x は、 $e^x = 1 + \frac{x}{1!} + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \dots$ のように無限級数に展開されます。この式の x に、 $-\frac{t^2}{2}$ を代入して、

$$e^{-\frac{t^2}{2}} = 1 - \frac{t^2}{1!2} + \frac{t^4}{2!2^2} - \frac{t^6}{3!2^3} + \dots$$

したがって、①は、

$$\begin{aligned} P(k) &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_0^k e^{-\frac{t^2}{2}} dt \\ &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_0^k \left(1 - \frac{t^2}{1!2} + \frac{t^4}{2!2^2} - \frac{t^6}{3!2^3} + \dots\right) dt \\ &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \left[t - \frac{t^3}{1!2 \cdot 3} + \frac{t^5}{2!2^2 \cdot 5} - \frac{t^7}{3!2^3 \cdot 7} + \dots\right]^k \\ &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \left[k - \frac{k^3}{1!2 \cdot 3} + \frac{k^5}{2!2^2 \cdot 5} - \frac{k^7}{3!2^3 \cdot 7} + \dots\right] \dots \textcircled{2} \end{aligned}$$

となりますから、この右辺の値を計算すればそれでよいわけです。たとえば、 $k=1$ のとき

$$P(1) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \left[1 - \frac{1}{1!2 \cdot 3} + \frac{1}{2!2^2 \cdot 5} - \frac{1}{3!2^3 \cdot 7} + \dots\right]$$

となり、この右辺の値を求めればよいのです。だが、ちょっと待って下さい。この式の右辺は、実は無限に続いているのです。一体どれだけの項数を計算すれば、どれだけ正しい値が求まるのか、はつきりしないので困ってしまいます。

②の〔 〕の中の無限級数は、正の項と負の項とが互い違いにでてくる級数で、このような級数を交項級数といいます。交項級数においては、一般に次のことが成り立ち、実は、上の問題はきれいに解決されます。関数 $f(x)$ が、次のように、条件Aをみたす交項級数に展開されているものとします。

$$f(x) = U_1 - U_2 + \dots + (-1)^{n-1} U_n + (-1)^n U_{n+1} + \dots$$

(ただし、多条件A: $U_n > U_{n+1}$, $n=1, 2, \dots$ をみたす)

このとき、 $f(x) \doteq U_1 - U_2 + \dots + (-1)^{n-1} U_n$ としますと、項打ち切りによる誤差Eは、 $E = (-1)^n \{U_{n+1} - U_{n+2} + U_{n+3} - \dots\}$

$$= (-1)^n \{U_{n+1} - (U_{n+2} - U_{n+3}) - (\dots) \dots\}$$

ここで、条件A: $U_n > U_{n+1}$, $n=1, 2, \dots$ より、この{ }の中の()の値はすべて正になりますから、 $\{U_{n+1} - (U_{n+2} - U_{n+3}) - \dots\} < U_{n+1}$
 $\therefore |E| < U_{n+1} \dots \textcircled{3}$

これは、項打ち切りによる誤差の大きさは、その次の項の大きさを越えないということを示しています。したがって、あらかじめ、小数点以下何桁まで正しい値が必要であるかを決めておけば、③の関係から第何項までこの級数を計算すればよいか分かるわけです。交項級数②は、はたして条件Aをみたしているでしょうか。もし、みたしていれば、項打ち切りによる誤差の評価が、③によってなされうまくなります。②において、 U_n と U_{n+1} との差は、

$$\begin{aligned} U_n - U_{n+1} &= \frac{k^{2n-1}}{(n-1)! 2^{n-1} (2n-1)} - \frac{k^{2n+1}}{n! 2^n (2n+1)} \\ &= \frac{k^{2n-1}}{(n-1)! 2^{n-1} (2n-1)} \left\{1 - \frac{(2n-1)k^2}{2n(2n+1)}\right\} \end{aligned}$$

と変形でき、結局、 $U_n - U_{n+1}$ の正、負は、{ }の値の正、負によって決まります。{ }の中のうしろの項は、 $\frac{(2n-1)k^2}{2n(2n+1)} = \frac{(2 - \frac{1}{n}) \cdot \frac{k^2}{n}}{2(2 + \frac{1}{n})} \dots \textcircled{4}$

と変形され、 k は高々5ぐらいまでの値についてわかればよいのですから、 n を大にすると④は1より小にできます。よって、このとき{ } > 0 、従って、 $U_n > U_{n+1}$ となつて、ある大なる自然数N以上で②は、条件Aをみたすことがわかります。簡単のため、 $k=1, 2, 3, 4$ と整数のときについて調べてみますと、(*) $k=1, 2$ のときは、 $n \geq 1$ で条件Aをみたし、 $k=3$ のときは、 $n \geq 4$ で、 $k=4$ のときは、 $n \geq 7$ で条件Aをみたしていることがわかりますから、②の級数の、これらの範囲の項までの和をとれば、項打ち切りによる誤差の評価ができます。

さて、以上の準備のもとに、②の k にある値を与えて、そのときの確率 $P(k)$ を求めることを考えますが、筆算ではとても無理ですから、この計算は電卓でやることにしました。その際、次の関係式

$$U_n \times \frac{(2n-1)k^2}{n \cdot 2 \cdot (2n+1)} = U_{n+1}$$

を用いて、次々に項を求めるプログラムを作り、項打ち切りによる誤差の大きさが、指定した値より小になるまで加えるようにしました。